

Weglängenprobleme der Elektronen in Metallen und Halbleitern

Justi, Eduard
Kohler, Max
Lautz, Günter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 3, 1951, S. 34-43



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Weglängenprobleme der Elektronen in Metallen und Halbleitern

Von E. Justi, M. Kohler und G. Lautz*)

Mit 3 Abbildungen

Abstract: In general the electrical resistivity of metal specimens does not depend on their size. At low temperatures, however, the mean free path of the electrons can be comparable with the geometric dimensions of the specimens. In this paper the theory of K. Fuchs and R. B. Dingle is discussed in detail, and it is shown that there is a discrepancy between their formulae and the experimental results of van den Berg and hitherto unpublished own measurements for gold at liquid helium temperatures. On the assumption of Rutherford-scattering in a semiconductor one can see that in first approximation the mechanism of electron scattering has only little influence on the formulae derived by Fuchs for thin films.

In agreement with similar observations on the anomalous skin-effect the authors propose to explain the discrepancy by the increase of residual resistivity with cold working of the surface layer and therefore by the enlargement of the effective surface-area. As to thin wires the assumption of a „surface-resistivity“ yields some approximated results in good agreement with those of Dingle.

In conclusion, the authors give a report of the above discussed resistivity measurements on cylindrical specimens of Mylius-gold, perhaps the purest metal ever obtained.

Disposition:

- I. Der Einfluß der mittleren freien Weglänge der Elektronen auf den Widerstand dünner Metalldrähte und -filme.
 1. Diskussion der bisherigen theoretischen Ergebnisse.
 2. Eine Abschätzung des Effektes für Halbleiter.
 3. Ein Vergleich der Theorie mit den experimentellen Ergebnissen.
 4. Einführung des Begriffes „Oberflächenwiderstand“.
- II. Widerstandsmessungen an Drähten aus reinstem Mylius-Gold bei Helium-Temperaturen.
- III. Zusammenfassung.

I. Der Einfluß der mittleren freien Weglänge der Elektronen auf den Widerstand dünner Metalldrähte und -filme

1. Diskussion der bisherigen Ergebnisse

Auf Grund der klassischen Elektronentheorie gab J. J. Thomson 1901 eine Widerstandsformel für den Fall an, daß die mittlere freie Weglänge der Elektronen mit den geometrischen Abmessungen des Materials vergleichbar wird¹⁾. Die experimentell beobachtete Widerstandsvermehrung wurde hier auf eine Verkürzung der mittleren freien Weglänge durch die verminderte Schichtdicke eines Metallfilmes zurückgeführt. Die wesentlichsten Annahmen der Thomsonschen Theorie waren eine diffuse Reflexion der Elektronen an der

*) Vorgetragen von G. Lautz auf der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Bad Nauheim am 14.10.1950.

Leiteroberfläche, eine konstante freie Weglänge λ_0 im Innern des Materials und eine zeitliche Mittelwertbildung für das in die Leitfähigkeitsformel eingehende $\bar{\lambda}$.

L. Nordheim hat 1934 aus ähnlichen geometrischen Betrachtungen heraus den Weglängeneffekt für zylindrische Drähte berechnet. In seiner Endformel für die Leitfähigkeit kann eine teilweise elastische Reflexion der Elektronen an der Leitoberfläche durch geeignete Wahl eines Reflexionskoeffizienten berücksichtigt werden²⁾.

Beide Berechnungen sind vom Standpunkt der modernen Metallphysik aus nicht exakt. Das gilt ebenso für einige andere Ableitungen, die von Lovell und Andrew^{3) 4)} zur Deutung ihrer Experimente gegeben wurden. Die exakte Berechnung der Leitfähigkeit dünner Schichten erfolgte 1938 durch K. Fuchs⁵⁾ und für zylindrische Drähte 1950 durch R. B. Dingle⁶⁾. Hier wird die statistische Verteilung der freien Weglängen der Elektronen um einen Mittelwert λ_0 im Innern des kompakten Materials berücksichtigt; das Zeitmittel der Thomsonschen Theorie wird durch das Scharmittel über alle Elektronen ersetzt. Die Endformeln umfassen den gesamten Bereich von der vollständig unelastischen bis zur völlig elastischen Reflexion an der Oberfläche.

Ausgangspunkt bei all diesen Betrachtungen in der Elektronentheorie der Metalle ist die Boltzmann-Gleichung

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad } f) + (\mathbf{b} \cdot \text{grad}_v f) + \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} \quad (1)$$

Dabei sind f die Verteilungsfunktion, \mathbf{b} der Beschleunigungs- und \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor. Im stationären Fall ist $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Da die Fuchsschen und Dingleschen Formeln auf den gleichen Voraussetzungen beruhen, soll im folgenden der experimentell meist verwirklichte Fall der dünnen Drähte diskutiert werden. Dann möge die z -Achse des Koordinatensystems mit der Drahtachse inzidieren, so daß sich $(\mathbf{b} \cdot \text{grad}_v f)$ zu $-\frac{eF}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}$ vereinfacht, wenn F die elektrische Feldstärke in der Achse und f_0 die ungestörte Verteilungsfunktion charakterisieren. Mit dem üblichen Lorentzschen Ansatz

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad (\tau = \text{Relaxationszeit})$$

wird die Boltzmann-Gleichung

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad } f) + \frac{f - f_0}{\tau} = -\frac{eF}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \quad (2)$$

von Dingle in kartesischen Koordinaten gelöst und die Lösung der Zylindersymmetrie des Drahtproblems angepaßt. Als Randbedingung ist eine diffuse Reflexion an der Zylinderoberfläche angenommen. Dann folgt

$$f - f_0 = -\frac{eF\tau}{m} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{rv_r + \sqrt{a^2(v_r^2 + v_\theta^2) - r^2 v_\theta^2}}{\tau(v_r^2 + v_\theta^2)} \right) \right\} \quad (3)$$

(a = Zylinderradius).

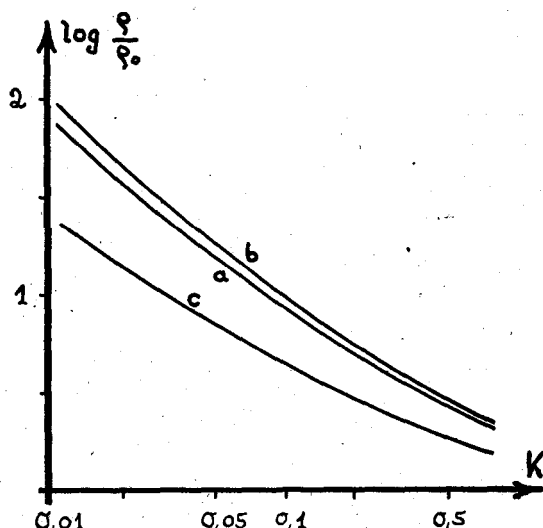


Abb. 1. Auf das kompakte Material bezogener spez. Widerstand

a) für dünne Drähte nach L. Nordheim,²⁾b) " " " " R. B. Dingle,⁶⁾

c) für dünne Schichten nach K. Fuchs als Funktion

von $k = \frac{2a}{\lambda}$.⁵⁾

Damit lassen sich die Stromdichte und die elektrische Leitfähigkeit im ganzen Draht finden. So zeigt die Abb. 1 den auf das kompakte Material bezogenen elektrischen Widerstand als Funktion der Größe $k = 2a/\lambda$, wobei $2a$ im Falle des Drahtes gleich dem Durchmesser und für den Metallfilm gleich der doppelten Schichtdicke zu setzen ist. Im Grenzfall $\lambda \ll 2a$ ist

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{3}{4k} + \frac{3}{8k^3} + \dots \quad (4)$$

2. Eine Abschätzung des Effektes für Halbleiter

Bevor wir auf einen Vergleich mit den Experimenten eingehen, sollen die Betrachtungen auf Halbleiter ausgedehnt werden, da hier ein veränderter Streumechanismus der Elektronen nicht notwendig auf einen größenordnungsmäßig gleich hohen Weglängeneffekt führen muß. Der einfacheren Rechnung wegen diskutieren wir den Effekt an den unendlich ausgedehnten dünnen Schichten. Ein ξ, η, ζ -System sei so orientiert, daß die ζ -Achse senkrecht zur Schichtebene und die ξ -Achse die Richtung der elektrischen Feldstärke F hat. Dann lautet die Lösung der Boltzmann-Gleichung unter der Randbedingung völlig diffuser Reflexion:

$$\begin{aligned} f - f_0 &= -\frac{eF\tau}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_\xi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\zeta}{v_\xi \tau}\right) \right) & v_\xi > 0, \\ f - f_0 &= -\frac{eF\tau}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_\xi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\zeta - a}{v_\xi \tau}\right) \right) & v_\xi < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Nach Einführung eines Polarkoordinatensystems v, ϑ, φ im Geschwindigkeitsraum wird die elektrische Stromdichte

$$\begin{aligned} j &= e \int v_\xi (f - f_0) d\tau_v \\ &= -\frac{\pi e^2 F}{m} \int_0^\infty \tau v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \left[1 - \exp\left(-\frac{\zeta}{\tau v \cos \vartheta}\right) \right] d\vartheta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^\pi \sin^3 \vartheta \left[1 - \exp\left(\frac{\zeta - a}{\tau v \cos \vartheta}\right) \right] d\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Da sich die makroskopisch meßbare Leitfähigkeit auf eine mittlere Stromdichte bezieht, muß noch über den Querschnitt gemittelt werden.

$$\bar{j} = \frac{1}{a} \int_0^a j(\zeta) d\zeta \quad (7)$$

$$= -\frac{4\pi e^2 F}{3m} \int_0^\infty \tau v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \left\{ 1 + \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{\tau v |\cos \vartheta|}{a} \left[\exp\left(-\frac{a}{\tau v |\cos \vartheta|}\right) - 1 \right] \sin^3 \vartheta d\vartheta \right\}.$$

Mit $\tau v = \lambda \ll a$ kommen wir im Falle einer energieunabhängigen Weglänge zur Formel (4) zurück.

In der modernen Halbleiterttheorie haben wir neben den Streuungen der Elektronen an den Gitterwellen noch die Streuprozesse an den neutralen und ionisierten Störstellen zu berücksichtigen. Im kompakten Material verhalten sich die Streuwahrscheinlichkeiten für beide Vorgänge in erster Näherung additiv. Solange man von dem Einfluß der neutralen Atome im Gitter absehen kann, folgt damit:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_g} + \frac{1}{\tau_{st}}. \quad (8)$$

Die Indices g und st deuten auf den Gitteranteil bzw. den Störstellenanteil hin. Aus (8) ergibt sich die Additivität der entsprechenden Widerstandsanteile:

$$\varrho = \varrho_g + \varrho_{st}. \quad (9)$$

Die unterschiedliche Temperaturabhängigkeit dieser Widerstände bedingt, daß bei tiefen Temperaturen der Gesamtwiderstand fast ausschließlich durch ϱ_{st} gegeben ist, während bei hohen Temperaturen $\varrho_g \gg \varrho_{st}$ wird^{7) 8)}. Da der hier diskutierte Weglängeneffekt erst bei tiefen Temperaturen und damit großen λ -Werten nachweisbar sein wird, können wir uns auf den Widerstand ϱ_{st} als den allein maßgebenden Anteil beschränken.

Bei hinreichend kleinen Störstellenkonzentrationen können diese hinsichtlich ihres Einflusses auf die Streuung der Leitungselektronen als voneinander unabhängig betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung ist nach Conwell und Weißkopf die Rutherfordsche Streuformel anwendbar, und man findet eine freie Weglänge, die dem Quadrat der Elektronenenergie und damit v^4 proportional ist⁹⁾. Wir setzen:

$$\lambda = C \cdot v^4. \quad (10)$$

Leider läßt sich die mittlere Stromdichte unter diesen Annahmen nur mit numerischen Methoden ermitteln. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß im experimentell interessierenden Grenzfall $\lambda \ll a$ die auf den Integrallogarithmus führenden e -Potenzen das Resultat in erster Näherung nicht beeinflussen. Also gilt:

$$\bar{j} \approx -\frac{4\pi e^2 F}{3m} \int_0^\infty C v^8 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \left\{ 1 - \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{C v^4 |\cos \vartheta|}{a} \sin^3 \vartheta d\vartheta \right\}. \quad (11)$$

Für kleine Elektronenkonzentrationen ist

$$4\pi v^2 f_0 dv = 4\pi v^2 n \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}^3 \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k T}\right) dv, \quad (12)$$

wobei n die Zahl der freien Elektronen je Volumeneinheit bedeutet. Mit

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2 C}{3m} \int_0^\infty v^6 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \quad (13)$$

und

$$\bar{\lambda} = 4\pi \frac{C}{n} \int_0^\infty v^6 f_0 dv \quad (14)$$

erhalten wir nach einfachen, in der klassischen Statistik üblichen Umformungen:

$$\bar{j} \approx \sigma_0 \left(1 - 4 \frac{\bar{\lambda}}{2a} + \dots \right) F$$

oder

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} \approx 1 - \frac{4}{k} + \dots \quad (15)$$

Das ist größenordnungsmäßig das nämliche Resultat wie für den Gitteranteil der Metalle, nur bezieht sich das $\bar{\lambda}$ entsprechend dem Widerstandsverhalten der Halbleiter allein auf den Streuprozess an den Störstellen. Die experimentelle Überprüfung dieser Beziehung dürfte nur mit solchen Halbleitern möglich sein, deren Elektronenkonzentration so klein ist, daß keine Entartung auftritt, die aber doch hinreichend groß bleibt, um bei den erforderlichen tiefen Temperaturen noch eine genügende Leitfähigkeit zu erzeugen. Als Beispiel kann mit kleinsten Zusätzen versehenes Ge dienen. Trotzdem wird man auch hier nur eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung erwarten können, wie die nachfolgende Diskussion für reinste Metalle zeigt.

3. Ein Vergleich der Theorie mit den experimentellen Ergebnissen von van den Berg und Justi

Dingle selbst wendet seine Formeln auf Experimente von Andrew an Quecksilberdrähten an, bei denen aber die Voraussetzung einer isotropen Fermiverteilung sicher nicht erfüllt ist. Wir wollen daher zum Vergleich Messungen von van den Berg¹⁰⁾ an dünnen Golddrähten bei 4,2° K. heranziehen. Diese sind als Punkte in der Abb. 2 eingetragen, während die ausgezogene Kurve nach der theoretischen Formel berechnet ist.

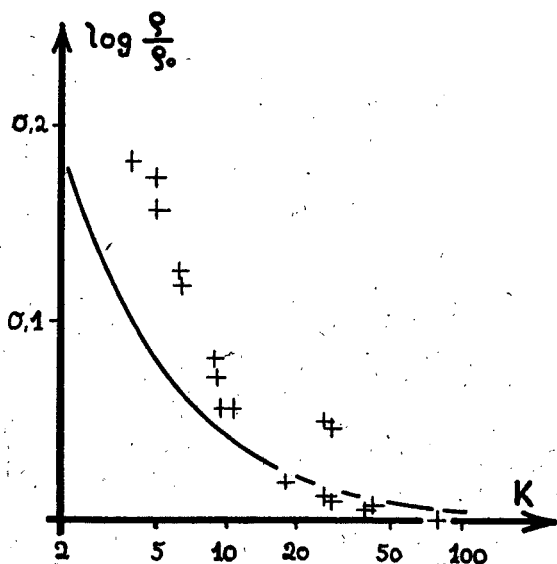


Abb. 2. Meßergebnisse von van den Berg an Golddrähten bei 4,2° K. und berechnete Kurve nach Dingle.⁸⁾

Die der Darstellung zugrunde gelegte mittlere freie Weglänge ist den ersten 6 Meßpunkten entnommen, denen besondere Genauigkeit zukommt. Würde man den λ -Wert so verändern, daß sich alle Meßpunkte dem theoretischen Kurvenverlauf anpassen, so würde sich eine Zahl von 0,19 freien Elektronen je Atom ergeben. Das steht im Widerspruch mit anderen Experimenten an reinen Goldproben. Eine ähnlich große Diskrepanz zeigen Meßwerte, die Justi an besonders reinen und einige mm dicken Goldkristallen bei extrem tiefen Temperaturen aufgenommen hat. Daher dürfte ein mangelnder Reinheitsgrad der Proben nicht zur Erklärung ausreichen.

Da ähnliche Abweichungen auch beim anomalen Skineffekt des Au auftreten, wollen wir zwei Gründe zur Deutung der Diskrepanz angeben. Zunächst kann in der Oberflächenschicht durch den Herstellungsprozeß ein zusätzlicher Restwiderstand hervorgerufen worden sein. Dieser ist auf die Kaltverformung der gezogenen Drähte und die hierbei in der Oberflächenschicht evtl. entstehenden Poren und Risse zurückzuführen.

Ein anderer Gesichtspunkt ist rein theoretischer Art. Die Boltzmann-Gleichung enthält hinsichtlich des Stoßeinflusses die Annahme einer universellen Stoßzeit. Diese Annahme ist aber bei den hier diskutierten Fragen nicht mehr gültig. Betrachtet man die Änderung der Fermiverteilung im Geschwindigkeitsraum der Elektronen durch das Anlegen eines homogenen Feldes in der v_z -Richtung, so gilt im isotropen Falle:

$$f - f_0 = \varphi(E) v_z. \quad (16)$$

Dabei ist noch vorausgesetzt, daß die Elektronen mit den Gitterwellen und den statistischen Gitterunregelmäßigkeiten nahezu elastisch zusammenstoßen. Die Störung der Verteilungsfunktion ist also in erster Näherung gleich dem Produkt einer nur von der Gesamtenergie abhängigen Größe und einer Kugelflächenfunktion erster Ordnung. In diesem Fall kann der Einfluß der Zusammenstöße der Elektronen mit dem Gitter immer in der Form

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

angenommen werden.

Bei dem hier behandelten Problem des Drahtdickeneinflusses ist die Verteilungsfunktion nicht von der Form (16), sondern wesentlich allgemeiner. Man wird daher noch Kugelflächenfunktionen höherer Ordnung berücksichtigen müssen. Damit existiert aber keine universelle Stoßzeit mehr. Man kann leicht zeigen, daß man für Kugelflächenfunktionen verschiedener Ordnung verschiedene Stoßzeiten erhält. So liefert z. B. der Blochsche Stoßoperator für $T \gg \Theta_D$ für die Stoßzeit der Kugelflächenfunktion 2. Ordnung einen Wert, der nur $1/3$ desjenigen der Kugelflächenfunktion 1. Ordnung ist. Die allgemeine Form der Boltzmann-Gleichung ist daher

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad } f) + \Omega f = - \frac{eF}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (17)$$

wo Ω ein linearer Integraloperator ist. Leider ist diese allgemeinere, korrekte Gleichung nur schwer exakt zu lösen. Auch nutzt eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von Einflußgrößen wenig, da in der Oberflächenschicht des Leiters der Einfluß der Oberfläche immer groß ist. Daher erscheint

eine exakte Lösung des Problems unter Berücksichtigung der speziellen Wahl des Stoßoperators fast unmöglich.

4. Einführung des Begriffes „Oberflächenwiderstand“

In diesem Zusammenhang erscheint uns analog zur Oberflächenimpedanz bei den Zentimeterwellen die Einführung des Begriffes „Oberflächenwiderstand“ für stationäre Vorgänge als zweckmäßig. Die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie erfolgt im Metall durch zwei grundsätzlich verschiedene Mechanismen: Einmal durch die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter (als Volumeneffekt), zum anderen durch die Stöße der Elektronen mit der Oberfläche. Daher ist der erste Teil der Jouleschen Wärme proportional zum Volumen, der andere proportional zur Oberfläche. Zweifellos ist diese Zweiteilung des Widerstandes streng nur gerechtfertigt in den Fällen, wo der Leiter dick gegenüber der freien Weglänge ist. Betrachten wir einen Draht der Länge L und vom Querschnitt q , so ist die gesamte entwickelte Joulesche Wärme:

$$R \cdot I^2 = \varrho \cdot q \cdot L \cdot j^2 + \varrho_F \cdot O \cdot j^2, \quad (18)$$

wo I die Stromstärke und j die Stromdichte sind. Weiter ist ϱ_F der Widerstand je Einheit der Oberfläche (Dimension: Ohm \cdot cm²) und ϱ der speziell elektrische Widerstand. Aus (18) folgt, wenn U der Umfang des Querschnittes ist:

$$R = R_n \left(1 + \frac{\varrho_F \cdot U}{\varrho \cdot q} \right), \quad (19)$$

wo $R_n = \varrho \frac{L}{q}$ der normale Widerstand des Drahtes ist. Bei kreisförmigem Querschnitt wird somit:

$$R = R_n \left(1 + \frac{2\varrho_F}{a\varrho} \right), \quad (19a)$$

wo a wieder der Radius ist.

Diese Formel ist unabhängig von der Annahme einer universellen Stoßzeit. Sie gilt aber wie erwähnt streng nur für dicke Drähte. Nach den Ergebnissen von Dingle und Fuchs bleibt sie auch noch für den Fall $k \gg 1$ gültig, wird dann aber nur zu einer Näherungsgleichung mit der Voraussetzung einer universellen Stoßzeit.

Zusammenfassend dürfen wir sagen: Die theoretischen Formeln können die experimentellen Meßergebnisse größenordnungsmäßig richtig deuten, reichen aber zu einer quantitativen Erfassung des Effektes bisher nicht aus. Auch kann man hinsichtlich der Wechselwirkung der Leitungselektronen mit der Leiteroberfläche vom thermodynamischen Standpunkt aus Bedenken hegen. Es ist daher vielleicht sinnvoller, nicht vom Kontinuum auszugehen, sondern z. B. bei einer Schicht von vornherein die Diskontinuität der Materie in einer Dimension streng zu berücksichtigen. Diesbezügliche Rechnungen sind von uns begonnen worden.

II. Widerstandsmessungen an Drähten aus reinstem Mylius-Gold bei Heliumtemperaturen

Vor vier Jahrzehnten hatte die Reindarstellung von Metallen durch die Initiative von F. Mylius¹¹⁾ einen hohen, inzwischen vielfach wieder verlorengegangenen Standard erreicht; besonders berühmt wurde das von Mylius

in jahrelanger Arbeit gereinigte Au, an dem die heute als klassisch geltenden Untersuchungen der PTR über elektrische und thermische Leitfähigkeit, elastische Daten, thermische Ausdehnung, galvanomagnetische Effekte usw. ausgeführt wurden, namentlich nachdem Grüneisen und Goens hieraus erstmals orientierte Einkristalle züchten konnten. Es fiel uns¹²⁾ vor über einem Jahrzehnt auf, daß die verschiedenen Proben von Mylius-Gold trotz ihrer offenbar gleichmäßigen Reinheit bei Heliumtemperaturen stark diffe-

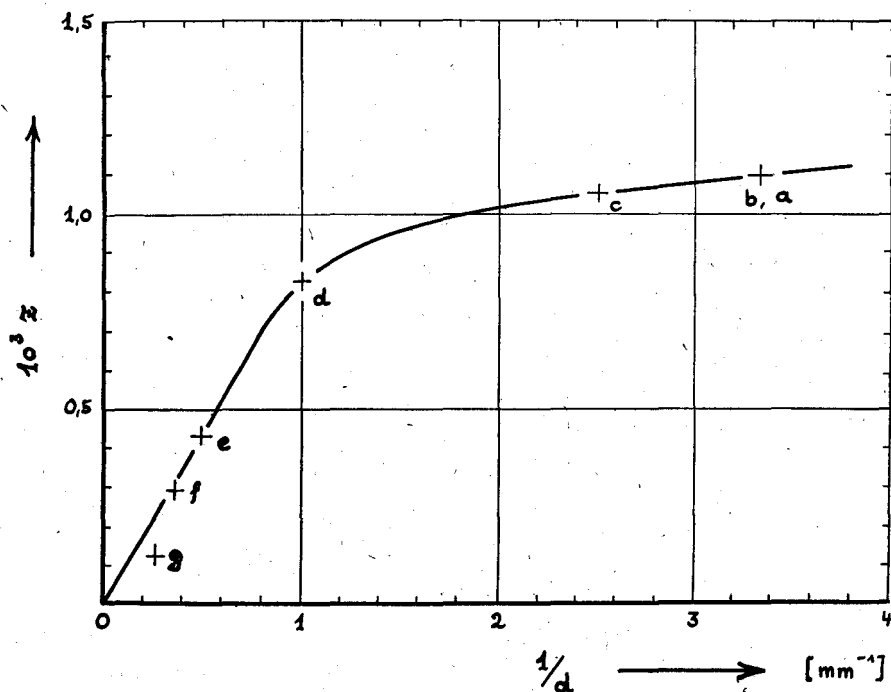


Abb. 3. Restwiderstand z (\cong Widerstandsverhältnis $R_{4,2}^{\circ}/R_{273}^{\circ}$) in Promille des Einspunktwiderstandes R_{273}° für dicke zylindrische Proben von Mylius-Gold als Funktion der reziproken Dicke $1/d$ (mm^{-1}). Erläuterungen zu den Proben a-g in Tab. 1

rierende Restwiderstände zeigten; schon damals (1940), ehe eine einwandfreie Theorie vorlag, versuchten wir diese Erscheinung mit der bei den tiefen Temperaturen und der extremen Reinheit vermutlich sehr großen freien Weglänge der Leitungselektronen in Verbindung zu bringen. Tatsächlich zeigten die Restwiderstände eine monotone Abnahme, wenn man sie nach steigenden Dicken ordnete (Abb. 3) und dabei diejenigen Proben, z. B. Au 12 von Meißner und Voigt¹³⁾, Au 14 von Grüneisen und Goens¹⁴⁾, sowie Au 13 und Au 14 von Justi und Scheffers¹⁵⁾ ausließ, deren Restwiderstände durch die Verformung bei den Elastizitätsmessungen unkontrollierbar erhöht waren.

Wenn es auch eindrucksvoll war, daß die von verschiedenen Autoren in verschiedenem Zusammenhang gemessenen Restwiderstände eine solche Gesetzmäßigkeit zeigten, sollte doch wegen der grundsätzlichen Bedeutung

eine besondere Meßreihe an Drähten verschiedener Dicke von 0,1 mm ... 2 mm aus demselben Mylius-Gold ausgeführt werden. Nachdem die Meßwerte für 0,3 bzw. 1,0 mm (a und d in der Tabelle 1) gewonnen waren, war leider eine weitere Fortführung der Messungen nicht mehr möglich, weil das Mylius-Gold anlässlich der Befreiung Berlins weggenommen wurde. In Anbetracht dessen, daß kein anderes Institut über so reines Au oder anderes Metall verfügt, das einen so einzigartig niedrigen Restwiderstand wie 0,01% erreicht, schien es doch gerechtfertigt, die Meßresultate nachfolgend trotz ihrer Lückenhaftigkeit wiederzugeben.

In der Tabelle 1 ist das Widerstandsverhältnis $r_{4,2} = R_{4,2}/R_{273}$ voll als Restwiderstand angesetzt, weil das ideale Widerstandsverhältnis nach Grüneisen¹⁶⁾ nur $r_{4,2} = 0,0000025$ beträgt und damit selbst gegen einen so kleinen Restwiderstand wie $z = 0,0001$ verschwindet. Diese Zahlen bestätigen, daß der Restwiderstand des kubischen Metalls im poly- und einkristallinen Zustand nicht differiert.

Tabelle 1

Abb. 3	Probe	Zustand	d [mm]	$1/d$ [mm ⁻¹]	$10^3 \cdot r_{20}$	$10^3 \cdot r_{4,2}$ $= 10^3 \cdot z$	Autoren	Literatur
a	Au 13 b	polykrist.	0,3	3,33	—	1,0 ₉	Justi	unveröff.
b	Draht	polykrist.	0,3	3,33	7,0 ₇	1,0 ₉	Meißner	17)
c	Au 5	Einkrist.	0,4	2,5	6,8 ₈	1,0 ₅	"	17)
d	Au 14 b	polykrist.	1,00	1,00	—	0,85	Justi	12)
e	Au 13 ¹	polykrist.	2,00	0,50	6,20	0,43	Grüneisen	} Briefl. Mitt. vom 20. 2. 1949
f	Au 11	Einkrist.	2,8	0,35 ₇	6,01*)	0,28 ₆ **)	"	
g	Au 13	Einkrist.	3,7 ₅	0,26 ₇	5,8 ₉	0,12	"	

*) Nach Grüneisen (Brief) 5,98

**) Nach Meißner u. Scheffers¹⁸⁾ 0,21

III. Zusammenfassung

Im allgemeinen ist der spezifische elektrische Widerstand unabhängig von der geometrischen Form der Leiter. Bei tiefen Temperaturen kann die mittlere freie Weglänge der Elektronen jedoch für hinreichend dünne Schichten oder Drähte in die Größenordnung der geometrischen Dimensionen gelangen. Die für diesen Fall von Fuchs und Dingle entwickelte Theorie wird hier diskutiert. Experimentelle Ergebnisse an Golddrähten von van den Berg und Justi stehen mit den theoretischen Formeln nur größenordnungsmäßig in Einklang.

In Übereinstimmung mit ähnlichen Beobachtungen beim anomalen Skin-effekt werden eine Erhöhung des Restwiderstandes in der Oberflächenschicht infolge der Kaltverformung der gezogenen Drähte und dadurch eine Vergrößerung der wirksamen Oberfläche als Ursachen für die bestehende Diskrepanz vorgeschlagen. Die Annahme eines Oberflächenwiderstandes führt unabhängig von der Voraussetzung einer universellen Stoßzeit zu ähnlichen Ergebnissen, wie Dingle sie für dünne Drähte erhalten konnte.

Im Falle der dünnen Schichten wird eine Erweiterung der Theorie des Weglängeneffektes für Halbleiter gegeben. Die bei tiefen Temperaturen allein

ausschlaggebende Störstellenstreuung der Elektronen ergibt in erster Näherung eine um den Faktor 5 größere Widerstandserhöhung als im Fall der reinen Gitterstreuung bei den Metallen.

Schließlich werden die eben diskutierten Meßergebnisse über die Dickenabhängigkeit des Restwiderstandes an dem bekannten extrem reinen Mylius-Gold mitgeteilt; im Dickenbereich von 0,3 bis 3,75 mm nimmt der Restwiderstand von 0,1% bis auf den einzigartig niedrigen Wert von $\sim 0,01\%$ des Eispunktwidestandes ab.

Literatur

- ¹⁾ J. J. Thomson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **11** (1901), 120.
- ²⁾ L. Nordheim; Act. Sci. et Ind. Nr. 131, Paris 1934.
- ³⁾ A. C. B. Lovell, Proc. Roy. Soc. (A) **157** (1936), 311.
- ⁴⁾ E. R. Andrew, Proc. Phys. Soc. (A) **62** (1949), 77.
- ⁵⁾ K. Fuchs, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34** (1938), 100.
- ⁶⁾ R. B. Dingle, Proc. Roy. Soc. (A) **202** (1950), 545.
- ⁷⁾ K. Lark-Horovitz and V. A. Johnson, Phys. Rev. **79** (1950), 176.
- ⁸⁾ K. Lark-Horovitz and V. A. Johnson, Phys. Rev. **79** (1950), 409.
- ⁹⁾ E. Conwell and V. E. Weisskopf, Phys. Rev. **77** (1950), 388.
- ¹⁰⁾ G. J. van den Berg, Dissertation, Leiden.
- ¹¹⁾ F. Mylius, Zs. f. anorg. Chem. **70** (1911), 203.
- ¹²⁾ E. Justi, Phys. Zs. **41** (1941), 486.
- ¹³⁾ W. Meißner u. B. Voigt, Ann. d. Phys. **7** (1930), 761.
- ¹⁴⁾ E. Grüneisen u. E. Goens, Zs. f. Phys. **44** (1927), 638.
- ¹⁵⁾ E. Justi u. H. Scheffers, Phys. Zs. **37** (1936), 383 u. 475.
- ¹⁶⁾ E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **16** (1933), 530.
- ¹⁷⁾ W. Meißner, Phys. Zs. **27** (1926), 726.
- ¹⁸⁾ W. Meißner u. H. Scheffers, Phys. Zs. **30** (1929), 827.